TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 344, Number 2, August 1994

NOTES SUR LA PROPRIÉTÉ DE NAMIOKA

AHMED BOUZIAD

ABSTRACT. We show that the class of co-Namioka compacts is stable under the arbitrary product if and only if it is stable under the finished product. We also prove that if X is a Valdivia compact space, then for every co-Namioka compact Y the product $X \times Y$ is co-Namioka. Several examples of co-Namioka compacts are given.

0. INTRODUCTION ET PRÉLIMINAIRES

Soit X un espace compact, Z un espace métrique et B un espace de Baire. On dit que le triplet (B, X, Z) possède la propriété $\mathcal{N}(B, X, Z)$ si pour toute application séparément continue $f: B \times X \to Z$, il existe un résiduel A de B tel que f soit continue en tout point de $A \times X$. Nous dirons que X est co-Namioka, ou encore que X possède la propriété $\mathcal{N}^*$, si on a $\mathcal{N}(B, X, Z)$ pour tout espace de Baire B et pour tout espace métrique Z. Divers auteurs se sont intéressés à cette classe de compacts (cf. la bibliographie qui figure dans [M-N]). La plupart des résultats obtenus dans ce domaine l'ont été en utilisant notamment des propriétés géométriques de l'espace de Banach $C(X)$ $(= C(X, \mathbb{R}))$. Dans la définition originale d'un compact co-Namioka [Deb], Z est d'ailleurs remplacé par $\mathbb{R}$. En fait, il résulte de la Proposition 3.1 ci-dessous que ces deux définitions sont équivalentes.[1]

Notre principale préoccupation dans cette note est la stabilité de la classe des compacts co-Namioka pour certaines opérations, en particulier la stabilité pour le produit. Si X et Y sont deux compacts co-Namioka, il n'est pas clair que le produit $X \times Y$ le soit aussi. Dans §2, on établit que c'est le cas si X est un compact de Valdivia (en fait, il suffit que X soit $\mathfrak{J}(\Delta)$-α-favorable). On établit aussi que si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de compacts telle que pour tout $J \subset I$ fini, le produit $\prod_{i \in J} X_i$ est co-Namioka, alors le produit $\prod_{i \in I} X_i$ est co-Namioka.

Dans §1, on retrouve des résultats de [Dev], en utilisant les jeux topologiques; en particulier, on montre en utilisant cette technique que pour tout ordinal μ, le compact $[0, \mu]$ est co-Namioka.

Soit X un espace topologique compact, Δ la diagonale de $X \times X$, et H une partie de $X \times X$ contenant Δ. Considérons le jeu $\mathfrak{J}(H)$ à deux person-

Received by the editors June 16, 1993 and, in revised form, October 5, 1993.
1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 54C05, 54C35, 54C99.
Key words and phrases. Continuity, separate continuity, Namioka's property.

[1]Peu de temps après la soumission de cette note, nous avons appris que I. Namioka et R. Pol avaient déjà prouvé cette équivalence (par une autre méthode) dans leur article, *Mappings of Baire spaces into function spaces and Kadeč renorming*, Israel J. Math. **78** (1992), 1–20.

0002-9947/94 \$1.00 + \$.25 per page

nes α et β défini de la façon suivante: une partie de ce jeu est une suite $(W_n, D_n, (x_n, y_n))$, ou W_n est un voisinage de H dans $X \times X$, D_n est une partie de $X \times X$ dense dans W_n et (x_n, y_n) est un élément de $W_n \cap D_n$. Le jeu se déroule de la façon suivante: c'est α qui commence en jouant un voisinage W_0 de H et une partie D_0 dense dans W_0; ensuite β joue $(x_0, y_0) \in W_0 \cap D_0$. Au $(n+1)$-éme coup α joue W_n et D_n, puis β joue $(x_n, y_n) \in W_n \cap D_n$. Le joueur α gagne la partie $(W_n, D_n, (x_n, y_n))$ si pour tout ouvert W de $X \times X$ contenant H, il existe un entier n tel que $(x_n, y_n) \in W$. Si α admet une stratégie gagnante pour ce jeu, on dit que l'espace X est $\mathfrak{I}(H)$-α-favorable.

Une variante de ce jeu a été introduite par G. Gruenhage dans [Gr]. Les compacts de Corson, et plus généralement les compacts de Valdivia, sont $\mathfrak{I}(\Delta)$-α-favorables (voir ci-dessous).

Dans cette note, la lettre B désignera toujours un espace de Baire et la lettre Z un espace métrique ayant pour distance d. Dans la suite nous utiliserons le fait qu'un espace est de Baire si et seulement s'il est β-défavorable pour le jeu de Choquet. Pour une démonstration de cette équivalence, ainsi que pour la définition du jeu de Choquet, voir [S]. ω désigne l'ensemble des entiers positifs on nuls. $\mathbb{R}$ et $[0, 1]$ sont, sauf mention du contraire, munis de la topologie usuelle.

1. Exemples de compacts co-Namioka et une propriété des compacts de Corson

Dans cette section, nous établissons un résultat qui permet d'obtenir de nouveaux compacts co-Namioka (Théorème 1.1). Nous montrons aussi en Proposition 1.5 que les compacts de Corson (et même ceux d'une classe plus générale introduite ci-dessous) vérifient une propriété de "Namioka forte". Un compact co-Namioka quelconque ne possède pas toujours cette propriété. Enfin, en utilisant les jeux topologiques, nous donnons une démonstration nouvelle du résultat de Deville cité ci-dessus.

Théorème 1.1. *Soit X un espace compact. Supposons qu'il existe un fermé H de $X \times X$ contenant Δ pour lequel X est $\mathfrak{I}(H)$-α-favorable, et tel que si on pose $D = H \backslash \Delta$, le compactifié d'Alexandroff de l'ouvert D (dans H) soit un espace co-Namioka. Alors X est un espace co-Namioka.*

Preuve. Soit B un espace de Baire, (Z, d) un espace métrique et $f: B \times X \to Z$ une application séparément continue. Soit $\varepsilon > 0$ et soit O un ouvert non vide de B, il s'agit de trouver $b \in O$ tel que pour tout $x \in X$ l'oscillation de f en (b, x) soit inférieure à 2ε.

Soit $Y = D \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de D et soit $\varphi: O \times Y \to \mathbb{R}$, l'application séparément continue définie par $\varphi(b, \infty) = 0$ et $\varphi(b, (x, y)) = d(f(b, x), f(b, y))$, pour tout $b \in O$ et pour tout $(x, y) \in D$. Notons que pour tout $b \in O$ l'application continue $\varphi(b, \cdot)$ est nulle à l'infini sur l'espace localement compact D. Soit $U_\varepsilon \subset O$ un ouvert tel que pour tous b, $b' \in U_\varepsilon$ et pour tout $(x, y) \in D$, on ait

$$|d(f(b, x), f(b, y)) - d(f(b', x), f(b', y))| < \varepsilon/6.$$

Fixons $a \in U_\varepsilon$, et pour tout $b \in U_\varepsilon$ posons

$$W_b = \{(x, y) \in X \times X / |d(f(b, x), f(b, y)) - d(f(a, x), f(a, y))| \leq \varepsilon/3\}.$$

On a $\Delta \cup D \subset W_b$ pour tout $b \in U_\varepsilon$. D'autre part, il existe un ouvert non vide $U \subset U_\varepsilon$ et un ouvert W contenant H tels que l'on ait $W \subset W_b$ pour tout $b \in U$. Pour établir ce fait, on va supposer le contraire et aboutir à une absurdité. Fixons une stratégie $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ gagnante pour α dans le jeu $\mathfrak{J}(H)$ (où σ_1 donne les voisinages de H et σ_2 donne les parties denses). Dans le jeu de Choquet sur l'espace de Baire U_ε on construit une stratégie τ pour le joueur β en procédant comme suit: on fixe $b_0 \in U_\varepsilon$ et $(x_0, y_0) \in \sigma_1(\varnothing) \cap \sigma_2(\varnothing)$ tels que

$$|d(f(b_0, x_0), f(b_0, y_0)) - d(f(a, x_0), f(a, y_0))| > \varepsilon/3$$

et on pose

$$\tau(\varnothing) = \{b \in U_\varepsilon / |d(f(b_0, x_0), f(b_0, y_0)) - d(f(b, x_0), f(b, y_0))| < \varepsilon/6\}.$$

Au coup n, quand α joue V_{n-1}, β choisit $b_n \in V_{n-1}$ et

$$(x_n, y_n) \in \sigma_1((x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})) \cap \sigma_2((x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}))$$

tels que l'on ait

$$|d(f(b_n, x_n), f(b_n, y_n)) - d(f(a, x_n), f(a, y_n))| > \varepsilon/3,$$

et joue l'ouvert non vide

$$\begin{aligned}\tau(V_0, \dots, V_{n-1})& \\ &= \{b \in V_{n-1} / |d(f(b_n, x_n), f(b_n, y_n)) - d(f(b, x_n), f(b, y_n))| < \varepsilon/6\}.\end{aligned}$$

Comme U_ε est un espace de Baire (donc β-défavorable pour le jeu de Choquet [S]), il existe un jeu (V_n) gagnant pour α contre cette stratégie. Soit $b \in \bigcap V_n$. Comme la stratégie σ est gagnante pour α dans le jeu $\mathfrak{J}(H)$ et $b \in U_\varepsilon$, il existe $n \in \omega$ tel que

$$|d(f(b, x_n), f(b, y_n)) - d(f(a, x_n), f(a, y_n))| < \varepsilon/6.$$

Pour un tel entier on obtient

$$\begin{aligned}&|d(f(b_n, x_n), f(b_n, y_n)) - d(f(a, x_n), f(a, y_n))| \\ &\quad \le |d(f(b_n, x_n), f(b_n, y_n)) - d(f(b, x_n), f(b, y_n))| \\ &\qquad + |d(f(b, x_n), f(b, y_n)) - d(f(a, x_n), f(a, y_n))| \\ &\quad < \varepsilon/6 + \varepsilon/6 = \varepsilon/3,\end{aligned}$$

ce qui est contradictoire.

Soit donc $U \subset U_\varepsilon$ un ouvert non vide et W un ouvert contenant H tels que $W \subset W_b$ pour tout $b \in U$. Soit $b \in U$ et $x \in X$; vérifions que l'oscillation de f en (b, x) est inférieure à 2ε. Soit

$$V_1 = \{y \in X / (x, y) \in W \text{ et } d(f(a, x), f(a, y)) < \varepsilon/3\}$$

et

$$V_2 = \{b' \in U / d(f(b, x), f(b', x)) < \varepsilon/3\}.$$

Pour tout $(b', y) \in V_2 \times V_1$ on a

$$\begin{aligned}d(f(b, x), f(b', y)) &\le d(f(b', y), f(b', x)) + d(f(b, x), f(b', x)) \\ &\le |d(f(a, x), f(a, y)) - d(f(b', x), f(b', y))| \\ &\qquad + d(f(a, x), f(a, y)) + \varepsilon/3 \\ &\le \varepsilon. \quad \square\end{aligned}$$

Rappelons qu'un compact est dit de Valdivia s'il est homéomorphe à un sous-espace X d'un cube $[0, 1]^I$ tel que $X \cap \Sigma(I)$ soit dense dans X, où

$$\Sigma(I) = \{x \in [0, 1]^I / \{i \in I / x(i) \neq 0\} \text{ est dénombrable}\}.$$

Un tel compact X est $\mathfrak{J}(\Delta)$-α-favorable. En effet, une stratégie $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ gagnante pour α dans le jeu $\mathfrak{J}(\Delta)$ est donnée par $\sigma_1(\varnothing) = X \times X$ et $\sigma_2(\varnothing) = \Sigma(I) \cap X$; au $(n+1)$-ème coup α répond au coup $((x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n))$ de β en jouant

$$\sigma_1((x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)) = \left\{(x, y) \in X \times X / |x(i) - y(i)| < \frac{1}{n} \ \forall i \in J_n\right\}$$

et

$$\sigma_2((x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)) = \Sigma(I) \cap X,$$

où J_n est l'ensemble des n premiers éléments de l'ensemble dénombrable $\bigcup_{0 \leq k \leq n} \{i \in I / x_k(i) \neq y_k(i)\}$ que α aura préalablement arrangé en suite.

Comme conséquence du Théorème 1.1 on retrouve le résultat principal de [Bo1] et en particulier que les compacts de Valdivia sont co-Namioka. Ce dernier résultat est obtenu dans [Dev-Go] comme conséquence d'un résultat de renormage.

Corollaire 1.2. *Tout compact $\mathfrak{J}(\Delta)$-α-favorable (en particulier, tout compact de Valdivia) est co-Namioka.*

Le point de départ de ce travail a été le résultat suivant:

Corollaire 1.3. *Soit X un compact. Supposons qu'il existe une suite de voisinages fermés (W_n) de la diagonale de $X \times X$ telle que si l'on pose $\Delta \cup D = \bigcap W_n$, le compactifié d'Alexandroff de l'ouvert D (dans $\Delta \cup D$) soit un espace co-Namioka. Alors, X est co-Namioka.*

Preuve. On pose $H = \bigcap W_n$ et on suppose que la suite (W_n) est décroissante. Une stratégie gagnante pour α dans le jeu $\mathfrak{J}(H)$ consiste à jouer les W_n pour voisinages de H et pour parties denses. □

Comme application du Théorème 1.1 (ou plus précisément de son Corollaire 1.3), on voit que le compact donné par l'intervalle éclaté est co-Namioka [Dev]. En effet, si pour tout $n \in \omega$ on pose $W_n = \{((x, \varepsilon), (y, \delta)) / |x - y| \leq 1/n\}$, alors $\bigcap W_n = \Delta \cup D$, où

$$D = \{((x, \varepsilon), (x, \delta)) / \varepsilon, \delta \in \{0, 1\}, \varepsilon \neq \delta, x \in [0, 1]\}.$$

D étant un sous-espace discret de $\Delta \cup D$, son compactifié d'Alexandroff est un compact d'Eberlein, donc co-Namioka. De la même manière on peut voir que pour tout entier $n \geq 1$, le compact ordonné (pour l'ordre lexicographique) $[0, 1] \times \{1, \dots, n\}$ est co-Namioka.

Une autre application est que $Y = [0, 1] \times [0, 1]$ muni de l'ordre lexicographique est un compact co-Namioka. En effect, si pour tout $n \in \omega$ on considère le voisinage $W_n = \{((x, y), (x', y')) / |x - x'| \leq 1/n\}$ de la diagonale de $Y \times Y$, on a $\bigcap W_n = \Delta_Y \cup D$. D est homéomorphe à $X = [0, 1] \times ([0, 1] \times [0, 1] \backslash \Delta)$, où $[0, 1]$ discret et où $[0, 1] \times [0, 1] \backslash \Delta$ est muni de la topologie usuelle. Comme il aisé de voir, le compactifié d'Alexandroff de X est un compact d'Eberlein.

De même le compact lexicographique $[0, 1]^n$, $n \geq 1$, est co-Namioka.

Deville montre dans [Dev] que pour tout ordinal μ le compact $[0, \mu]$ est co-Namioka. Nous allons donner ici une démonstration de ce résultat qui utilise les jeux topologiques.

Théorème 1.4. *Pour tout ordinal μ, le compact $[0, \mu]$ est co-Namioka.*

Preuve. (Par récurrence sur $\mu \geq \omega$.) Puisque $[0, \omega]$ est métrisable, pour $\mu = \omega$ le résultat est établi. Soit $\mu > \omega$. On suppose que pour tout $\alpha < \mu$ le compact $[0, \alpha]$ est co-Namioka.

Soit $f: B \times [0, \mu] \to Z$ une application séparément continue. Soit $\varepsilon > 0$ et $O \subset B$ un ouvert non vide. Il existe un ouvert non vide $U \subset O$ et $\omega \leq \alpha < \mu$ tels que l'on ait $d(f(b, x), f(b, y)) < \varepsilon$ pour tout $b \in U$ et pour tous x, $y \in [\alpha, \mu]$. En effet, dans le cas contraire on construit une stratégie σ pour β dans le jeu de Choquet sur O telle que durant une partie (V_n) compatible avec σ, le joueur β construit en même temps une suite $(b_n) \subset O$ et une suite croissante $(\alpha_n) \subset [\omega, \mu[$, assujetties au conditions suivantes:

$$\sigma(\varnothing) = O,$$
$$b_n \in V_n \text{ et } d(f(b_n, \alpha_n), f(b_n, \alpha_{n+1})) \geq \varepsilon/2,$$
$$\sigma(V_0, \dots, V_n) = \{b \in V_n / d(f(b, \alpha_n), f(b_n, \alpha_n)) < \varepsilon/6\}$$
$$\cap \{b \in V_n / d(f(b, \alpha_{n+1}), f(b_n, \alpha_{n+1})) < \varepsilon/6\}.$$

Si maintenant (V_n) est un jeu pour α gagnant contre σ, on fixe $b \in \bigcap V_n$ et $\alpha < \sup_n \alpha_n$ tels que $d(f(b, x), f(b, y)) < \varepsilon/6$ pour tous x, $y \in [\alpha, \sup_n \alpha_n]$. En considérant n tel que $\alpha_n > \alpha$, et en utilisant le fait que $b \in V_{n+1}$ on trouve une contradiction avec le fait que $d(f(b_n, \alpha_n), f(b_n, \alpha_{n+1})) \geq \varepsilon/2$.

Soit $\Omega \subset U$ un ouvert non vide tel que l'on ait $d(f(b, x), f(b', x)) < \varepsilon$ pour tous b, $b' \in \Omega$ et pour tout $x \in [0, \alpha]$ (rappelons que par hypothèse $[0, \alpha]$ est co-Namioka). On vérifie que pour tout $b \in \Omega$ et pour tout $x \in [0, \mu]$ l'oscillation de f en (b, x) est inférieure à 3ε (pour cela on envisage le cas $x \in [0, \alpha]$ et le cas $x \in]\alpha, \mu]$). □

Un compact de Corson est $\mathfrak{J}(\Delta)$-α-favorable (car c'est un compact de Valdivia). En fait, pour un tel compact Y, il existe un stratégie gagnante pour α qui donne pour parties denses des ouverts de $Y \times Y$ (plus exactement $Y \times Y$, voir [Gr]). Convenons d'appeler un tel espace fortement $\mathfrak{J}(\Delta)$-α-favorable. Pour un compact fortement $\mathfrak{J}(\Delta)$-α-favorable on a la propriété suivante.

Proposition 1.5. *Soit Y un compact fortement $\mathfrak{J}(\Delta)$-α-favorable. Soit $f: B \times Y \to Z$ une application telle que pour tout $b \in B$:*

(1) *l'application $f(b, \cdot): Y \to Z$ est continue,*
(2) *l'ensemble C_b des $x \in Y$ tel que $f(\cdot, x): B \to Z$ est continue en b, est dense dans Y.*

Alors, il existe un résiduel A de B tel que f soit continue en tout point de $A \times Y$.

Preuve. Soit O un ouvert non vide de B et $\varepsilon > 0$. Pour tout $b \in B$ posons $W_b = \{(x, y) \in Y \times Y / d(f(b, x), f(b, y)) \leq \varepsilon\}$; montrons qu'il existe un ouvert non vide $U \subset O$ et un voisinage W de la diagonale de $Y \times Y$ tels que $W \subset W_b$ pour tout $b \in U$. Supposons le contraire. Soit $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ une stratégie fortement gagnante pour α dans $\mathfrak{J}(\Delta)$ (i.e., les parties denses données par σ_2 sont aussi des ouverts de $Y \times Y$), et soit $(x_0, y_0) \in \sigma_1(\varnothing) \cap \sigma_2(\varnothing)$. Soit τ la stratégie pour β dans le jeu de Choquet sur O définie par: $\tau(\varnothing) = O$, et au n-ème coup quand α joue V_{n-1}, β choisit $b_n \in V_{n-1}$ et

$$\begin{aligned}(x_n, y_n) \in \sigma_1((x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}))\\ \cap \sigma_2((x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})) \cap (C_{b_n} \times C_{b_n})\end{aligned}$$

tels que $d(f(b_n, x_n), f(b_n, y_n)) > \varepsilon$. Ce choix de (x_n, y_n) est possible car $f(b_n, \cdot)$ est continue et $\sigma_2((x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}))$ est un ouvert (dense). Ensuite, β joue l'ouvert $\tau(V_0, \dots, V_n)$ donné par l'intérieur de

$$\begin{aligned}\{b \in V_{n-1}/d(f(b, x_n), f(b_n, x_n)) < \varepsilon/3\}\\ \cap \{b \in V_{n-1}/d(f(b, y_n), f(b_n, y_n)) < \varepsilon/3\}.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que O est un espace de Baire et que σ est gagnante on trouve une contradiction.

Fixons U et W vérifiant la condition ci-dessus. Soit W_1 un voisinage symétrique de la diagonale de $Y \times Y$ tel que $W_1 \circ W_1 \subset W$. Soit $b \in U$ et $x \in Y$, et soit $x_0 \in W_1[x] \cap C_b$; posons $V_b = \{b' \in U/d(f(b, x_0), f(b', x_0)) < \varepsilon\}$. Pour tout $(b', y) \in V_b \times W_1[x]$ on a

$$\begin{aligned}d(f(b', y), (f(b, x)) \leq d(f(b', y), f(b', x_0)) + d(f(b', x_0), f(b, x_0))\\ + d(f(b, x_0), f(b, x)) \leq 3\varepsilon.\end{aligned}$$

L'oscillation de f en (b, x) est donc inférieure à 6ε. □

Il est facile de donner un exemple montrant que les compacts co-Namioka ne possèdent pas tous la propriété de la Proposition 1.5. Pour tout espace de Baire B complètement régulier et sans point isolé, le compact de Valdivia $[0, 1]^B$ est un tel compact. Voici un autre exemple: soit $B = \{0, 1\}^\omega$, $Y = \{0, 1\}^B$ et $f: B \times Y \to \{0, 1\}$ l'application définie par $f(x, \varphi) = \varphi(x)$. On munit X et Y de la topologie produit (avec $\{0, 1\}$ discret). Le compact Y est de Valdivia, donc co-Namioka. Pour tout $b \in B$ l'application $f(b, \cdot)$ est continue et f n'a aucun point de continuité. Soit $b \in B$; montrons que C_b est dense dans Y. Soit $x_1, \dots, x_n \in B$ et $\varphi \in Y$. Pour tout $1 \leq i \leq n$ soit $k_i \in \omega$ tel que $b(k_i) \neq x_i(k_i)$ (quand un tel élément existe). Soit $F = \{k_1, \dots, k_n\}$, et soit $\varphi_0 \in Y$ un élément vérifiant $\varphi_0(y) = \varphi(b)$ si y coïncide avec b sur F, et $\varphi_0(x_i) = \varphi(x_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On a $\varphi_0 \in C_b$, donc C_b est dense dans Y.

Remarque 1.6. Signalons que diverses variantes de la Proposition 1.5 ont été obtenues par le passé dans le cas particulier où le facteur compact Y est métrisable (cf. par exemple [F, T-H, T]).

2. Stabilité pour le produit

Dans cette section nous donnons des conditions suffisantes pour qu'un produit de co-Namioka soit encore un co-Namioka.

Théorème 2.1. *Soit Y un compact co-Namioka. Pour tout compact X $\mathfrak{I}(\Delta)$-α-favorable, le compact produit $X \times Y$ est co-Namioka.*

Preuve. Soit $f: B \times (X \times Y) \to Z$ une application séparément continue relativement à B et à $X \times Y$ (où B est un espace de Baire et Z est un espace métrique). Soit $\varepsilon > 0$ et soit O un ouvert non vide de B, il s'agit de trouver $b \in O$ tel que l'oscillation de f soit inférieure à ε en tout point $(b, x, y) \in \{b\} \times X \times Y$. Pour tout $b \in O$ posons

$$W_b = \{(x, x') \in X \times X / d(f(b, x, y), f(b, x', y)) \leq \varepsilon/4 \ \forall y \in Y\}.$$

Fait 1. Pour tout $b \in B$, W_b est un voisinage de la diagonale de $X \times X$. En effet, soit $x \in X$. Pour tout $y \in Y$, soit U_y un voisinage de x dans X et V_y un voisinage de y dans Y tels que l'on ait $d(f(b, x, y), f(b, x', y')) < \varepsilon/8$ pour tout $(x', y') \in U_y \times V_y$. En choisissant $y_1, \ldots, y_n \in Y$ tels que $Y = \bigcup_{1 \leq i \leq n} V_{y_i}$ et en posant $U = \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_{y_i}$, on vérifie que $U \times U \subset W_b$.

Fait 2. Il existe un ouvert non vide $U \subset O$ et un voisinage W de la diagonale de $X \times X$ tels que l'on ait $W \subset W_b$ pour tout $b \in U$.

En effet, supposons le contraire et montrons que O n'est pas un espace de Baire. Pour cela on va construire une stratégie gagnante τ pour le joueur β dans le jeu de Choquet sur O. Soit (σ_1, σ_2) une stratégie gagnante pour α dans le jeu $\mathfrak{J}(\Delta)$ sur X, où σ_1 donne les voisinages de la diagonale de $X \times X$ et σ_2 donne les parties denses. On pose $\tau(\varnothing) = O$ et on fixe $(x_0, x_0') \in \sigma_1(\varnothing) \cap \sigma_2(\varnothing)$. Au $(n+1)$-ème coup quand α joue V_n, β choisit $b_{n+1} \in V_n$, $(x_{n+1}, x_{n+1}') \in \sigma_1((x_0, x_0'), \ldots, (x_n, x_n')) \cap \sigma_2((x_0, x_0'), \ldots, (x_n, x_n'))$ et $y_{n+1} \in Y$ tels que

$$d(f(b_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}), f(b_{n+1}, x_{n+1}', y_{n+1})) > \varepsilon/4,$$

et répond à $(V_0, \ldots, V_n)$ en jouant l'ouvert de O donné par

$$\begin{aligned}\tau(V_0, \ldots, V_n) = \{&b \in V_n / d(f(b, x_{n+1}, y_{n+1}), f(b_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1})) < \varepsilon/12\} \\ &\cap \{b \in V_n / d(f(b, x_{n+1}', y_{n+1}), f(b_{n+1}, x_{n+1}', y_{n+1})) < \varepsilon/12\}.\end{aligned}$$

Supposons que α gagne contre cette stratégie. Il existe alors un jeu (V_n) pour α compatible avec τ tel que $\bigcap V_n \neq \varnothing$. Soit $b \in \bigcap V_n$, et soit $n \geq 1$ un entier tel que $d(f(b, x_n, y), f(b, x_n', y)) < \varepsilon/12$ pour tout $y \in Y$ (on utilise le Fait 1 et le fait que la stratégie (σ_1, σ_2) soit gagnante pour α dans le jeu $\mathfrak{J}(\Delta)$ sur X). On obtient alors

$$\begin{aligned}d(f(b_n, x_n, y_n), f(b_n, x_n', y_n)) &\leq d(f(b_n, x_n, y_n), f(b, x_n, y_n)) \\ &\quad + d(f(b, x_n, y_n), f(b, x_n', y_n)) \\ &\quad + d(f(b, x_n', y_n), f(b_n, x_n', y_n)) \\ &< \varepsilon/4,\end{aligned}$$

ce qui est absurde. O n'est donc pas un espace de Baire, ce qui est à nouveau absurde. Ceci établit le Fait 2.

Fixons un ouvert non vide $U \subset O$ et un voisinage ouvert W de la diagonale de $X \times X$ tels que $W \subset W_b$ pour tout $b \in U$ (Fait 2). Soit $x_1, \ldots, x_m \in X$ tels que $X = \bigcup_{1 \leq i \leq m} W[x_i]$. En considérant les applications séparément continues $f_i \colon B \times Y \to Z$, $i = 1, \ldots, m$, définies par $f_i(b, y) = f(b, x_i, y)$, et en utilisant le fait que Y est co-Namioka, on trouve un ouvert non vide $\Omega \subset U$ tel que pour tous b, $b' \in \Omega$ et pour tout $y \in Y$, on ait

$$d(f(b, x_i, y), f(b', x_i, y)) < \varepsilon/4, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Soit $b \in \Omega$; montrons que pour tout $(x, y) \in X \times Y$ l'oscillation de f en (b, x, y) est inférieure à 2ε. Soit $(x, y) \in X \times Y$ et soit $1 \leq i \leq m$ tel que

$x \in W[x_i]$. Pour voisinage de b on prend Ω et pour voisinage de (x, y) on prend

$$V = (W[x_i] \times Y) \cap \{(x', y') \in X \times Y / d(f(b, x', y'), f(b, x, y)) < \varepsilon/4\}.$$

Pour tout $(b', x', y') \in \Omega \times V$, on a

$$\begin{aligned} d(f(b', x', y'), f(b, x, y)) \leq & \, d(f(b', x', y'), f(b', x_i, y')) \\ & + d(f(b', x_i, y'), f(b, x_i, y')) \\ & + d(f(b, x_i, y'), f(b, x, y')) \\ & + d(f(b, x, y'), f(b, x, y)) \\ \leq & \, \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Le résultat précédant permet bien sûr de retrouver le fait que les compacts $\mathfrak{I}(\Delta)$-favorables sont co-Namioka.

Théorème 2.2. *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de compacts telle que pour tout $J \subset I$ fini le produit $\prod_{i \in J} X_i$ soit co-Namioka. Alors le compact produit $\prod_{i \in I} X_i$ est co-Namioka.*

Preuve. Pour tout $J \subset I$ on note p_J la projection de $\prod_{i \in I} X_i$ sur $\prod_{i \in J} X_i$. Soit $f: B \times \prod_{i \in I} X_i \to Z$ une application séparément continue. Soit $\varepsilon > 0$ et $O \subset B$ un ouvert non vide. Il existe un ouvert non vide $U \subset O$ et une partie finie J de I, tels que pour tout $b \in U$ et pour tous x, $y \in \prod_{i \in I} X_i$ vérifiant $p_J(x) = p_J(y)$, on ait $d(f(b, x), f(b, y)) < \varepsilon$. En effet, dans le cas contraire on considère la stratégie σ pour β dans le jeu de Choquet sur O qui donne aussi une suite (J_n) de parties finies de I deux à deux disjointes et une suite $((x_n, y_n))$ d'éléments de $\prod_{i \in I} X_i$, définie de la façon suivante: $\sigma(\varnothing) = O$, et quand α joue V_n, β choisit $b_n \in V_n$, une partie finie J_n de I disjointe de $\bigcup_{i<n} J_i$, et x_n, $y_n \in \prod_{i \in I} X_i$ tels que $p_i(x_n) = p_i(y_n)$ pour tout $i \in I \backslash J_n$ et $d(f(b_n, x_n), f(b_n, y_n)) > \varepsilon/2$; β joue ensuite l'ouvert non vide donné par

$$\begin{aligned} \sigma(V_0, \dots, V_n) = & \{b \in V_n / d(f(b, x_n), f(b_n, x_n)) < \varepsilon/6\} \\ & \cap \{b \in V_n / d(f(b, y_n), f(b_n, y_n)) < \varepsilon/6\}. \end{aligned}$$

Soit (V_n) un jeu pour α gagnant contre cette stratégie, et soit $b \in \bigcap V_n$. Soit $J \subset I$, J fini, tel que pour tous x, $y \in \prod_{i \in I} X_i$ vérifiant $p_J(x) = p_J(y)$ on ait $d(f(b, x), f(b, y)) < \varepsilon/6$ (voir [E]). En considérant un entier n tel que $J \cap J_n = \varnothing$, et en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient une contradiction avec le fait que $d(f(b_n, x_n), f(b_n, y_n)) \geq \varepsilon$. Par conséquent J et U existent.

Fixons $a \in \prod_{i \in I} X_i$. En utilisant le fait que $\prod_{i \in J} X_i$ soit co-Namioka on choisit un ouvert non vide $\Omega \subset U$ tel que l'on ait

$$d(f(b, \overline{x}), f(b', \overline{x})) < \varepsilon$$

pour tous b, $b' \in \Omega$ et pour tout $x \in \prod_{i \in I} X_i$, où $\overline{x}$ est l'élément de $\prod_{i \in I} X_i$ défini par $p_J(\overline{x}) = p_J(x)$ et $p_{I \backslash J}(\overline{x}) = p_{I \backslash J}(a)$. Soit $b \in \Omega$ et $x \in \prod_{i \in I} X_i$; montrons que l'oscillation de f en (b, x) est inférieure à 8ε. Posons $V_x =$

$\{x' \in \prod_{i\in I} X_i / d(f(b, x), f(b, x')) < \varepsilon\}$. Pour tout $(b', x') \in \Omega \times V_x$ on a

$$\begin{aligned} d(f(b', x'), f(b, x)) &\leq d(f(b', x'), f(b', \overline{x'})) \\ &\quad + d(f(b', \overline{x'}), f(b, \overline{x'})) \\ &\quad + d(f(b, \overline{x'}), f(b, x')) \\ &\quad + d(f(b, x'), f(b, x)) \\ &< 4\varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

3. Lien entre $\mathcal{N}(B, X, \mathbb{R})$ et $\mathcal{N}(B, X, Z)$

La définition d'un co-Namioka adoptée ici diffère, a priori, de celle adoptée dans [M-N]. La proposition suivante implique l'équivalence de ces deux définitions.

Proposition 3.1. *Pour tout espace de Baire B et tout compact X, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) $\mathcal{N}(B, X, \mathbb{R})$,

(2) $\mathcal{N}(B, X, Z)$ *pour tout espace métrique* Z.

Preuve. Il est évident que (2) implique (1); montrons que (1) implique (2). Supposons que l'on ait $\mathcal{N}(B, X, \mathbb{R})$. Soit Z un espace métrique et $f: B \times X \to Z$ une application séparément continue. Soit $O \subset B$ un ouvert non vide et $\varepsilon > 0$. Il existe un ouvert non vide $U \subset O$ et une partie finie $\{x_1, \dots, x_n\}$ de X vérifiant la condition suivante:

pour tous $b \in U$ et $x \in X$, il existe $1 \leq i \leq n$
tel que $d(f(b, x), f(b, x_i)) < \varepsilon$.

Supposons le contraire et considérons alors la stratégie σ pour β dans le jeu de Choquet sur O définie de la façon suivante. β commence par jouer $\sigma(\varnothing) = O$ et fixe $x_0 \in X$. Au n-ème coup, quand α joue V_{n-1}, β choisit $b_n \in V_{n-1}$ et $x_n \in X$ tels que

$$d(f(b_n, x_n), f(b_n, x_i)) \geq \varepsilon \quad \text{pour tout } 0 \leq i < n,$$

et joue l'ouvert non vide donné par

$$\sigma(V_0, \dots, V_{n-1}) = \bigcap_{i\leq n} \{b \in V_{n-1} / d(f(b, x_i), f(b_n, x_i)) < \varepsilon/3\}.$$

Soit (V_n) un jeu gagnant pour α contre cette stratégie, et soit $b \in \bigcap V_n$. Comme X est compact le sous-espace $\{f(b, x_i)/i \in \omega\}$ de Z est précompact; par conséquent il existe deux entiers m et n, avec $m > n$, tels que $d(f(b, x_n), f(b, x_m)) < \varepsilon/3$. Pour de tels entiers on obtient

$$\begin{aligned} d(f(b_m, x_n), f(b_m, x_m)) &\leq d(f(b_m, x_n), f(b, x_n)) \\ &\quad + d(f(b, x_n), f(b, x_m)) \\ &\quad + d(f(b, x_m), f(b_m, x_m)) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

Soit $\Omega \subset U$ un ouvert non vide tel que l'on ait

$$|d(f(b, x), f(b, x_i)) - d(f(b', x), f(b', x_i))| < \varepsilon$$

pour tous b, $b' \in \Omega$, pour tout $x \in X$ et pour tout $1 \leq i \leq n$. On obtient Ω en utilisant $\mathcal{N}(B, X, \mathbb{R})$. Soit $(b, x) \in \Omega \times X$; montrons, pour conclure, que l'oscillation de f en (b, x) est inférieure à 6ε. Soit $1 \leq i \leq n$ tel que $d(f(b, x), f(b, x_i)) < \varepsilon$; posons

$$U_b = \{b' \in \Omega / d(f(b, x_i), f(b', x_i)) < \varepsilon\}$$

et

$$V_x = \{x' \in X / d(f(b, x'), f(b, x_i)) < \varepsilon\}.$$

Pour tout $(b', x') \in U_B \times V_x$, on a

$$\begin{aligned} d(f(b', x'), f(b, x_i)) &\leq d(f(b', x'), f(b', x_i)) + d(f(b', x_i), f(b, x_i)) \\ &\leq |d(f(b', x'), f(b', x_i)) - d(f(b, x'), f(b, x_i))| \\ &\quad + d(f(b, x'), f(b, x_i)) + \varepsilon \\ &< 3\varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Remarques 3.2. (1) Signalons que Christensen dans [C] montre que si B est tel que l'on ait $\mathcal{N}(B, X, \mathbb{R})$ pour tout compact X, alors on a $\mathcal{N}(B, X, Z)$ pour tout compact X et pour tout espace métrique Z.

(2) En utilisant des arguments analogues à ceux employés dans la preuve de la Proposition 3.1 (ou encore, en s'appuyant sur 2.1 et en suivant la méthode de [C]), on peut montrer que si B est un espace de Baire et X un compact tels que l'on ait $\mathcal{N}(B, X, \{0, 1\})$, alors on a $\mathcal{N}(B, X, Z)$ pour tout espace métrique (Z, d) tel que $d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$.

(3) Un autre problème intéressant est celui de la stabilité de la classe des compacts co-Namioka par passage aux sous-espaces fermés. Le fait que tout cube $[0, 1]^I$ soit co-Namioka, montre que ce problème est le même que cleui de la caractérisation des compacts co-Namioka. L'existence d'un compact non co-Namioka (voir [M-N]), montre donc qu'en général on n'a pas cette stabilité. D'autre part, il est facile de voir que tout retract d'un co-Namioka est co-Namioka (cela résulte du fait qu'on a stabilité par image continue). Soit Y un compact et soit $C_p(Y)$ l'espace obtenu en munissant $C(Y)$ de la topologie de la convergence simple. Suivant [Ar], on dit qu'un sous-espace fermé F de Y est *t-plongeable* dans Y (et on note $F \overset{t}{\subset} Y$), s'il existe une application continue $\varphi\colon C_p(F) \to C_p(Y)$ telle que $\varphi(f)_{|F} = f$ pour tout $f \in C(F)$. Là encore, il est facile de voir que si Y est co-Namioka et $F \overset{t}{\subset} Y$, alors F est co-Namioka. En fait, on peut démontrer le résultat suivant.

Proposition. *Soit F un sous-espace fermé d'un co-Namioka Y. Supposons qu'il existe une suite d'applications continues $\varphi_n\colon C_p(F) \to C_p(Y)$ $(n \in \omega)$ telle que pour pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $f \in C(F)$ il existe $n \in \omega$ vérifiant*

$$\sup_{x \in F} |\varphi_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Alors F est co-Namioka.

Preuve. On reprend les notations du début de la preuve du Théorème 1.1. En utilisant le fait que O est un espace de Baire, on fixe un ouvert non vide $U \subset O$ et $n \in \omega$ tels que l'on ait $\sup_{x \in F} |\varphi_n(f_b)(x) - f_b(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $b \in U$. (On note f_b l'application $f(b, \cdot)$.) Comme Y est co-Namioka, on peut fixer un ouvert non vide $\Omega \subset U$ tel que l'on ait $\sup_{y \in Y} |\varphi_n(f_b)(y) - \varphi_n(f_{b'})(y)| < \varepsilon$ pour tous b, $b' \in \Omega$. On vérifie alors que pour tout $b \in \Omega$ et pour tout $x \in F$ l'oscillation de f en (b, x) est inférieure à 4ε. $\square$

(4) Pour que le produit de deux compacts co-Namioka soit co-Namioka, il suffit d'après le Théorème 2.1 que l'un d'eux soit $\mathfrak{J}(\Delta)$-α-favorable. Nous ne savons pas si l'on peut se passer de cette condition.

Références

[Ar] A. V. Arkhangel'skiĭ, *C_p-theory*, Recent Progress in General Topology (M. Hušek and J. van Mill, eds.), Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1992, pp. 1–48.

[Bo1] A. Bouziad, *Continuité jointe et continuité séparée*, Sem. Math. de Rouen (1990-91), 165–170.

[Bo2] ———, *Une classe d'espaces co-Namioka*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **310** (1990), 779–782.

[C] J. P. R. Christensen, *Joint continuity of separately continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **82** (1981), 455–461.

[Deb] G. Debs, *Points de continuité d'une fonction séparément continue*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 167–176.

[Dev] R. Deville, *Convergence ponctuelle et uniforme sur un espace compact*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. **37** (1989), 507–515.

[Dev-Go] R. Deville et G. Godefroy, *Some applications of projective resolutions of identity*, Proc. London Math. Soc. (a paraître).

[E] R. Engelking, *General topology*, PWN, Warszawa, 1977.

[F] R. E. Feiock, *Cluster sets and joint continuity*, J. London Math. Soc. **7** (1973), 397–406.

[Gr] G. Gruenhage, *Covering properties of $X^2 \backslash \Delta$, W-sets, and compact subsets of Σ-products*, Topology Appl. **17** (1984), 287–304.

[M-N] S. Mercourakis and S. Negrepontis, *Banach spaces and Topology* II, Recent Progress in Genreal Topology (M. Hušek and J. van Mill, eds.), Amsterdam, 1992, pp. 495–536.

[S] J. Saint-Raymond, *Jeux topologiques et espaces de Namioka*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), 499–504.

[Sh] D. B. Shakhmatov, *Compact spaces and their generalizations*, Recent Progress in General Topology (M. Hušek and J. van Mill, eds.), Amsterdam, 1992, pp. 571–640.

[T-H] F. Topsøe and J. Hoffmann-Jørgensen, *Analytic spaces and their application*, Anaytic Sets, Academic Press, London, 1980.

[T] J. P. Troallic, *Questions d'analyse en dynamique topologique*, Thèse d'Etat, Université de Rouen, 1980.

Université de Rouen, UFR des Sciences, Département de Mathématiques, URA C.N.R.S. D1378, 76821 Mont Saint Aignan, France

E-mail address: `bouziad@univ-rouen.fr`